Phần 1: Giải tích Fourier

- Chương 1 : Chuỗi Fourier
- Chương 2 : Tích phân Fourier và biến đổi Fourier

Chương 1 Chuỗi Fourier

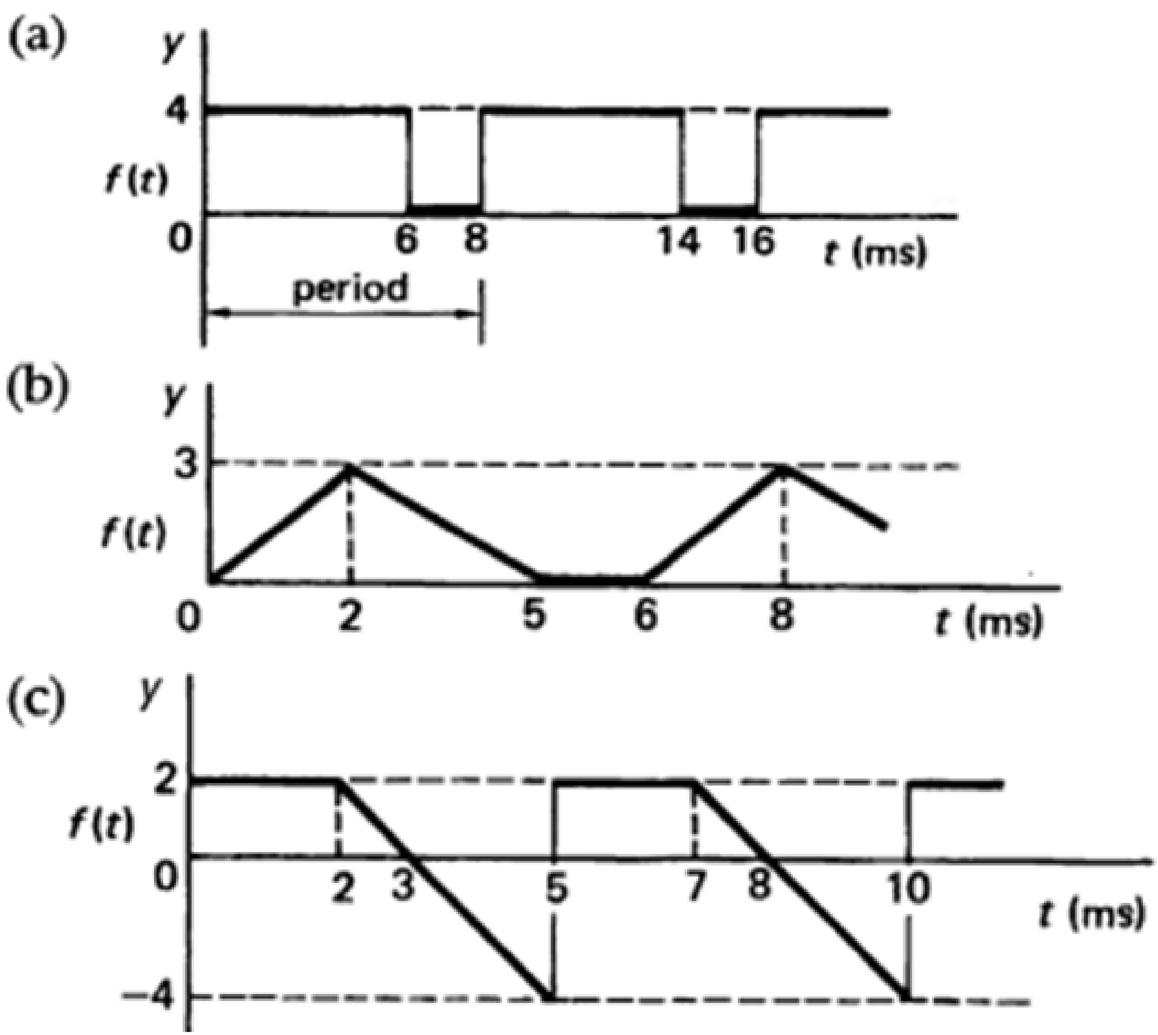
- 1.1 Hàm tuần hoàn
- 1.2 Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn
- 1.3 Các công thức khác để tính các hệ số Fourier
- 1.4 Khai triển bán kỳ
- 1.5 Các dạng khác của chuỗi Fourier
- 1.6 Ứng dụng của chuỗi Fourier

1.1 Hàm tuần hoàn

- Định nghĩa 1.1
  hàm f(t) gọi là tuần hoàn
  nếu và chỉ nếu tồn tại số dương T sao cho
  $$f(t+T) = f(t)$$
  với mọi t trong miền xác định của f(t)

- T gọi là chu kỳ (chu kỳ cơ bàn)
- Phân loại:
  - f(t) tuần hoàn sin
  - f(t) tuần hoàn không sin

Ví dụ



period = 8 ms

period = ...

period = ...

1.2 Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn

- Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn f(t) chu kỳ T là :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

Với : n = 1,2 ...

$\omega_0 = 2\pi/T$ = tần số cơ bản

a_0, a_n , b_n = các hệ số khai triển chuỗi Fourier .

Các hệ số khai triển Fourier

- Giá trị các tích phân xác định

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) = \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)dt = 0 \qquad \forall m, n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = 0 \qquad \forall m, n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

Các hệ số khai triển Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) = \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \qquad \forall m, n$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Các hệ số khai triển Fourier

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt=0 \qquad \forall m,n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{T}{2} & m=n\end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

Các hệ số khai triển Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = 0 \qquad \forall m, n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{T}{2} & m = n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

Điều kiện tồn tại

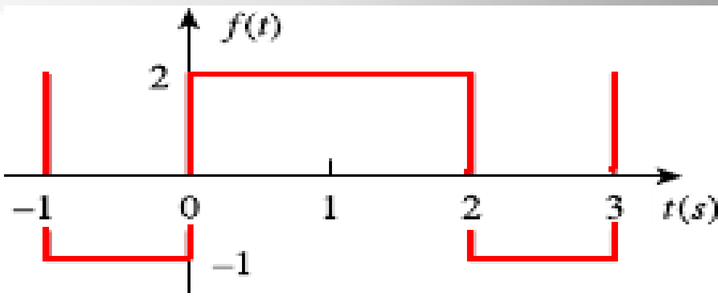
- <u>Định lý 1.1:</u> (Định lý Dirichlet)

Nếu hàm f tuần hoàn chu kỳ T và thỏa điều kiện Dirichlet trên một khoảng I
Thì chuỗi Fourier của f hội tụ về :

- $f(t)$ nếu f liên tục tại t.
- $\frac{1}{2}\left[f(t_k^+) + f(t_k^-) \right]$ nếu f gián đoạn tại t.

Ví dụ tìm chuỗi Fourier

a) Xác định chuỗi Fourier ?
b) Kiểm lại dùng MATLAB ?



Giải

❖Chu kỳ và tần số cơ bản: $T = 3, \quad \omega_o = 2\pi / T = 2\pi / 3$

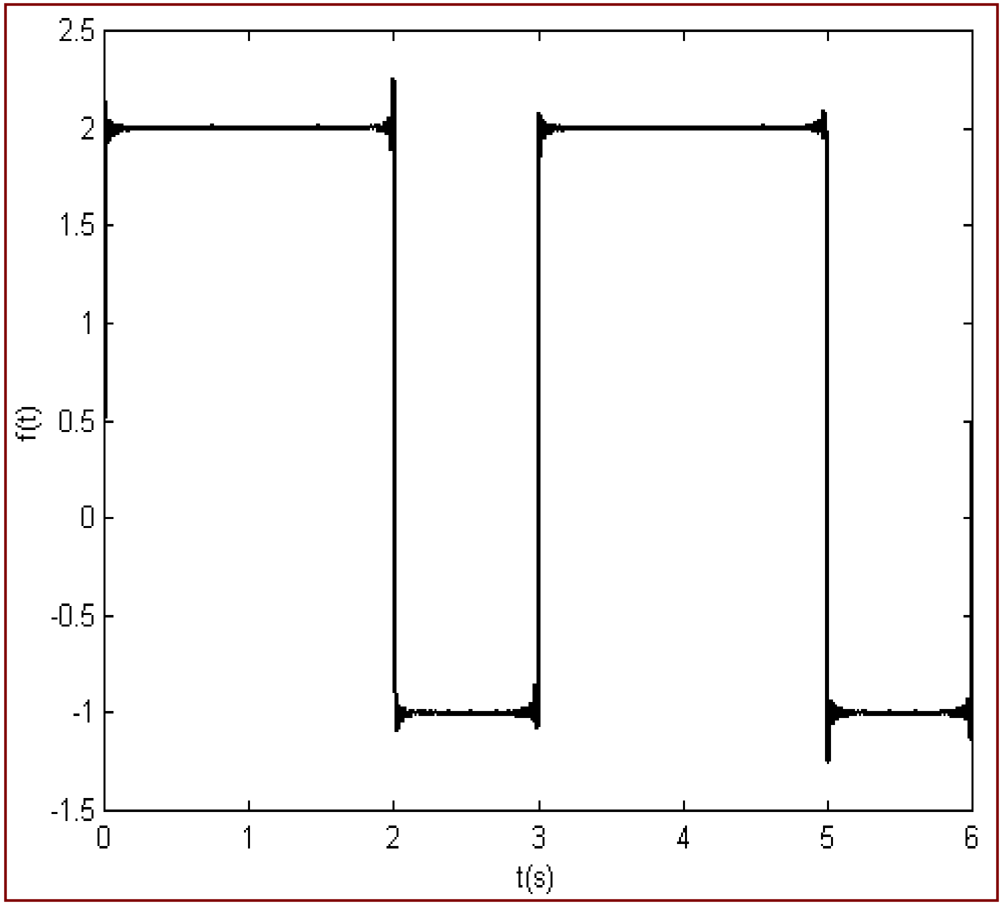
❖Các hệ số chuỗi Fourier: $a_0 = 2$,

$$a_n = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} \qquad b_n = \frac{3}{n\pi}\left(1-\cos\frac{4n\pi}{3}\right)$$

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}\cos\frac{2n\pi t}{3} + \frac{3}{n\pi}\left(1-\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\sin\frac{2n\pi t}{3}\right]$$

Ví dụ tìm chuỗi Fourier

```
pi = 3.14159; N = 100; T = 3; a0 = 1;
w0 = 2*pi/T;
t = linspace(0,2*T,600);
for n=1:N
   a(n)= (3/(n*pi))*sin(4*n*pi/3);
   b(n)= (3/(n*pi))*(1 - cos(4*n*pi/3));
end
for i=1:length(t)
   f(i) = a0;
   for n=1:length(a)
      f(i) = f(i) + a(n)*cos(n*w0*t(i)) +
                        b(n)*sin(n*w0*t(i));
   end
end
plot(t,f,'black');
xlabel('t(s)');
ylabel('f(t)');
```



Ví dụ tìm chuỗi Fourier

- Tìm chuỗi Fourier của các hàm sau

$$a)\ f(t)=\begin{cases}0 & -\pi\le t\le 0\\ \sin t & 0\le t\le \pi\end{cases}\quad ;T=2\pi$$

$$b)\ f(t)=4-t^2 \quad -2\le t\le 2\ ;\ T=4$$

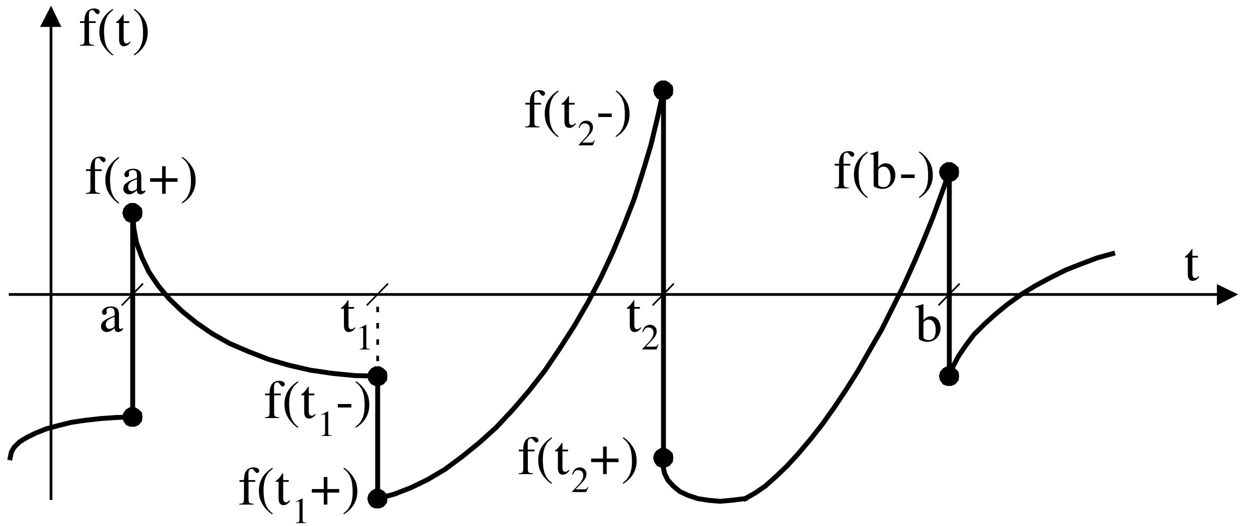
- Kết quả

$$a)\quad f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin t}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$$

$$b)\quad f(t)=\frac{8}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{2}$$

1.3 Các công thức khác để tính các hệ số Fourier

Bước nhảy của một hàm:



❖ Định nghĩa :

Bước nhảy của một hàm f tại t_k là: $J_k = f(t_k^+) - f(t_k^-)$

- Nếu f(t) gián đoạn tại t_k thì $J_k \neq 0$
- Nếu f(t) liên tục tại t_k thì $J_k = 0$

Hai công thức lặp để tính các hệ số Fourier

❖Định lý 1.2:

Nếu f là hàm tuần hoàn chu kỳ T, thỏa điều kiện Dirichlet và có m bước nhảy $J_1, J_2, \ldots, J_m$ tại m điểm gián đoạn $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ trong một khoảng chu kỳ nửa hở [a, a + T) thì:

$$a_n = \frac{-1}{n\omega_0} b_n' - \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \sin(n\omega_0 t_k)$$

(n = 1, 2, …)

(b_n' = hệ số chuỗi Fourier của hàm f')

Hai công thức lặp để tính các hệ số Fourier

❖Định lý 1.3:

Nếu f là hàm tuần hoàn chu kỳ T, thỏa điều kiện Dirichlet và có m bước nhảy $J_1, J_2, \ldots, J_m$ tại m điểm gián đoạn $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ trong một khoảng chu kỳ nửa hở [a, a + T) thì:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n\omega_0} a_n' + \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \cos(n\omega_0 t_k)}$$

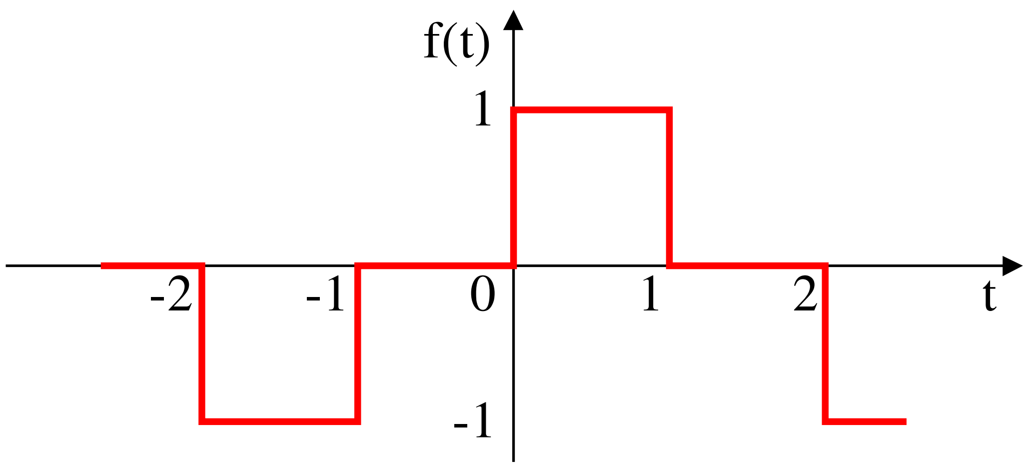
(n = 1, 2, …)

(a_n' = hệ số chuỗi Fourier của hàm f')

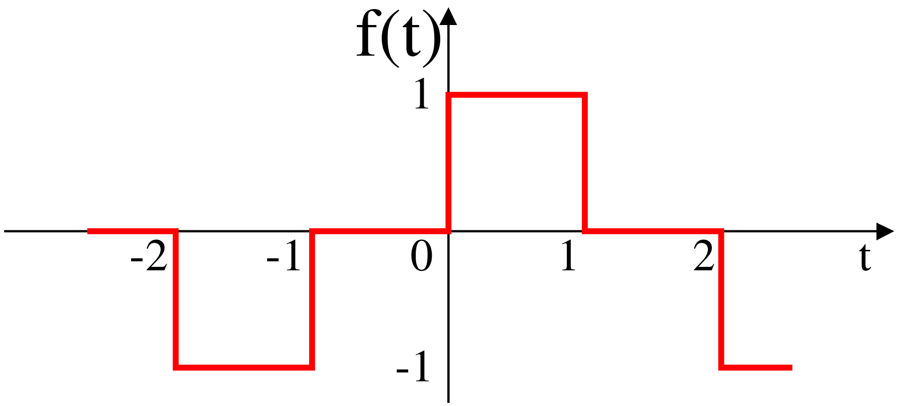
Ví dụ tìm khai triển Fourier dùng công thức lặp

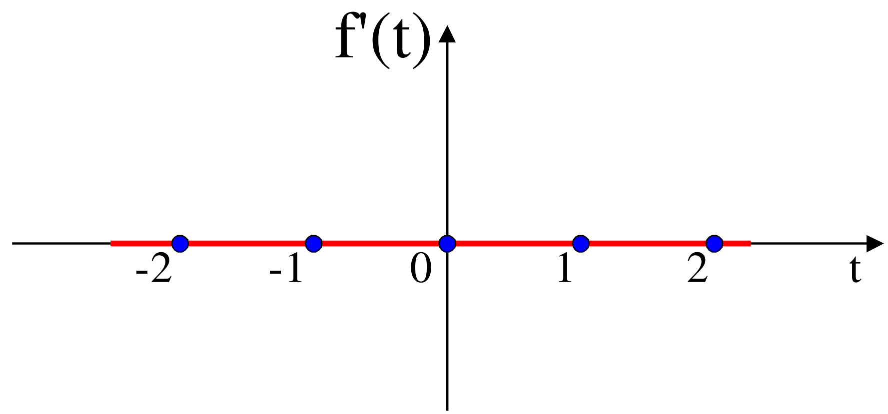
Xác định các hệ số chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn mà định nghĩa trong 1 chu kỳ là

$$f(t)=\begin{cases}-1 & -2<t<-1\\ 0 & -1<t<0\\ 1 & 0<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases}$$



Ví dụ tìm khai triển Fourier dùng công thức lặp





- Bảng các điểm gián đoạn t_k và bước nhảy J_k

k	1	2	3	4
t_k	-2	-1	0	1
J_k	-1	1	1	-1

- $f'(t) = 0 \quad \Rightarrow a_n' = b_n' = 0$

Ví dụ tìm khai triển Fourier dùng công thức lặp

k	1	2	3	4
t_k	-2	-1	0	1
J_k	-1	1	1	-1

$$a_n = \frac{-1}{n\omega_0} b_n^{'} - \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \sin(n\omega_0 t_k)$$

$$b_n = \frac{1}{n\omega_0} a_n^{'} + \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \cos(n\omega_0 t_k)$$

$$a_n = \frac{-2}{n\pi} b_n^{'} - \frac{1}{n\pi} \left[(-1)\sin\frac{n\pi(-2)}{2} + (1)\sin\frac{n\pi(-1)}{2} + (1)\sin\frac{n\pi(0)}{2} + (-1)\sin\frac{n\pi(1)}{2} \right]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} a_n^{'} + \frac{1}{n\pi} \left[(-1)\cos\frac{n\pi(-2)}{2} + (1)\cos\frac{n\pi(-1)}{2} + (1)\cos\frac{n\pi(0)}{2} + (-1)\cos\frac{n\pi(1)}{2} \right]$$

Ví dụ tìm khai triển Fourier dùng công thức lặp

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad (n = 2k+1)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \qquad (n = 2k+1)$$

Đối với a_0 ta tính trực tiếp

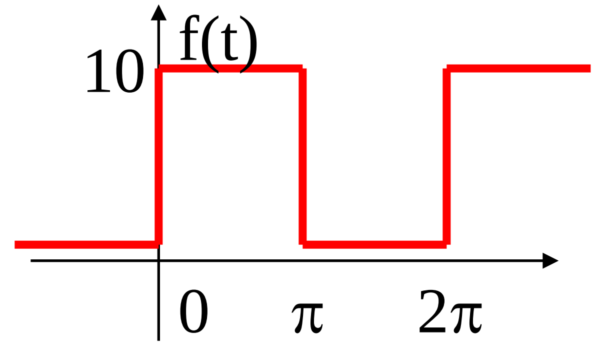
$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(-1)dt + \int_{0}^{1}(1)dt\right] = 0$$

Chuỗi Fourier của f(t) là :

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n=2k+1}}^{+\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{2} + \sin\frac{n\pi t}{2}\right]$$

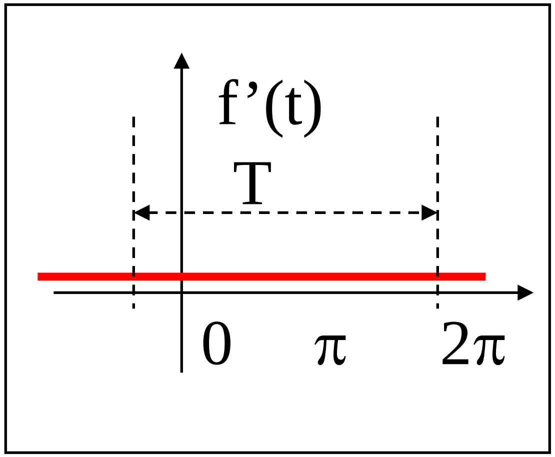
Ví dụ tìm khai triển Fourier dùng công thức lặp

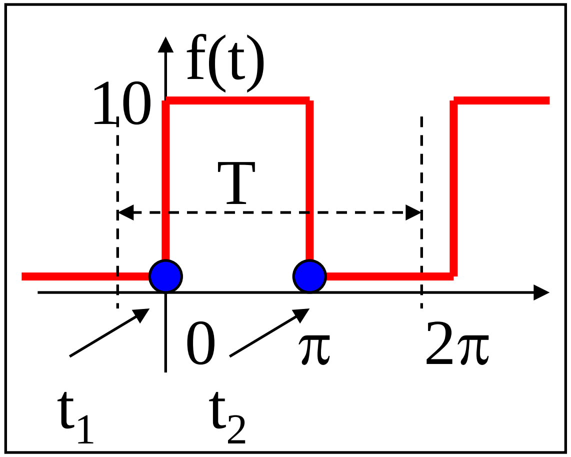
Xác định các hệ số chuỗi Fourier dùng công thức lặp ?



Giải

- Xác định f'(t), t_k và J_k:

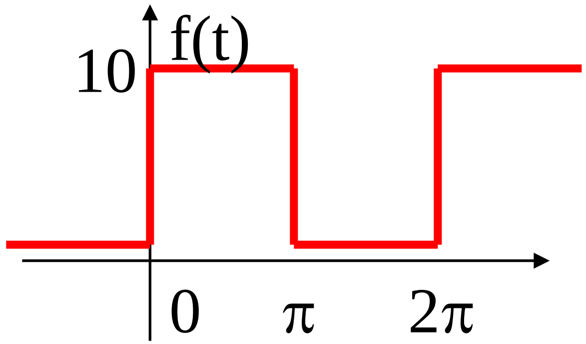




t_k	$t_1 = 0$	$t_2 = \pi$
J_k	10	– 10

Ví dụ tìm khai triển Fourier dùng công thức lặp

Xác định các hệ số chuỗi Fourier dùng công thức lặp ?



Giải

❖ Xác định các hệ số chuỗi Fourier:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 5$$

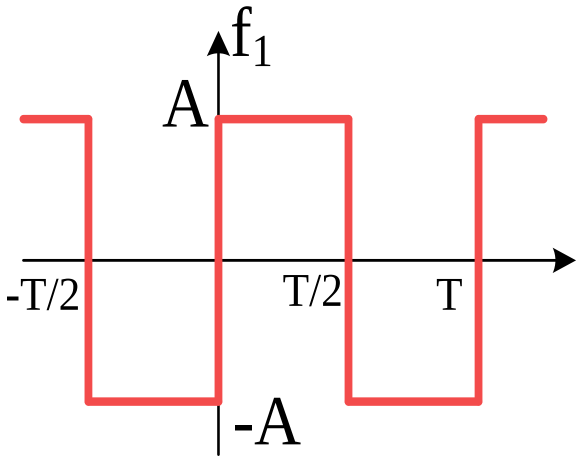
$$\mathrm{a_n} = -\frac{1}{\mathrm{n}\pi}[10.\sin(0) - 10\sin(n\pi)] = 0$$

$$\mathrm{b_n} = \frac{1}{\mathrm{n}\pi}[10.\cos(0) - 10\cos(n\pi)] = \frac{20}{\mathrm{n}\pi} \text{ (n:odd)}$$

Ví dụ tìm chuỗi Fourier

❖ **Sóng vuông**

- $f_1(t)$ hàm lẻ



$$f_1(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=2k+1}}^{+\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin(n\omega_0 t)$$

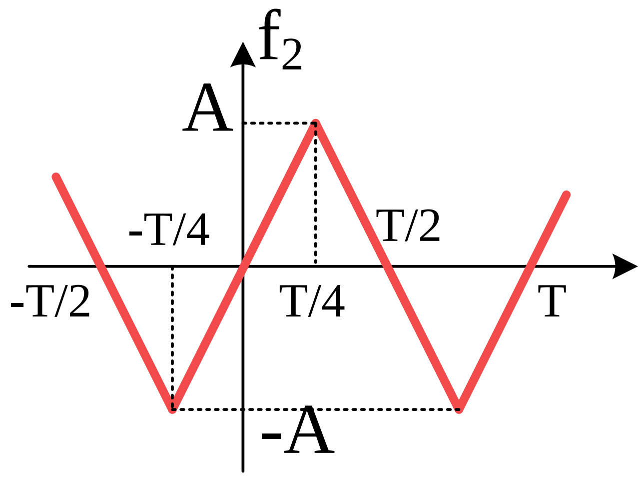
$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} A\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{4A}{T} \frac{\left(-\cos(n\omega_0 t)\right)}{n\omega_0}\Bigg|_0^{T/2}$$

$$= \frac{2A\left(-\cos(n\pi)+1\right)}{n\pi} = \frac{4A}{n\pi}\Bigg|_{n=2k+1}$$

Ví dụ tìm chuỗi Fourier

❖ **Sóng tam giác**

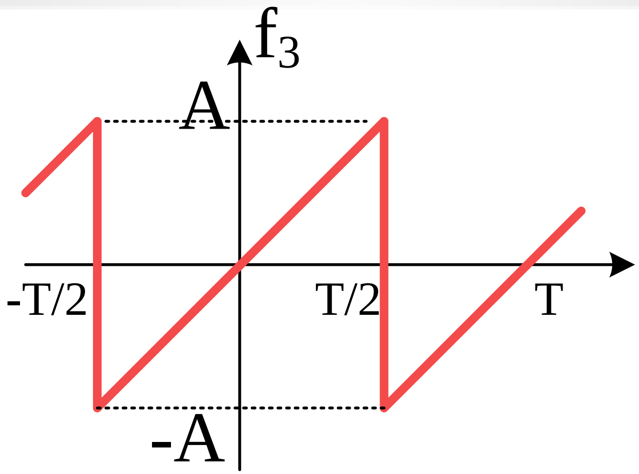
- $f_2(t)$ hàm lẻ



$$f_2(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=2k+1}}^{+\infty} \frac{8A}{n^2\pi^2} \sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) \sin(n\omega_0 t)$$

Ví dụ tìm chuỗi Fourier

- **Sóng răng cưa**



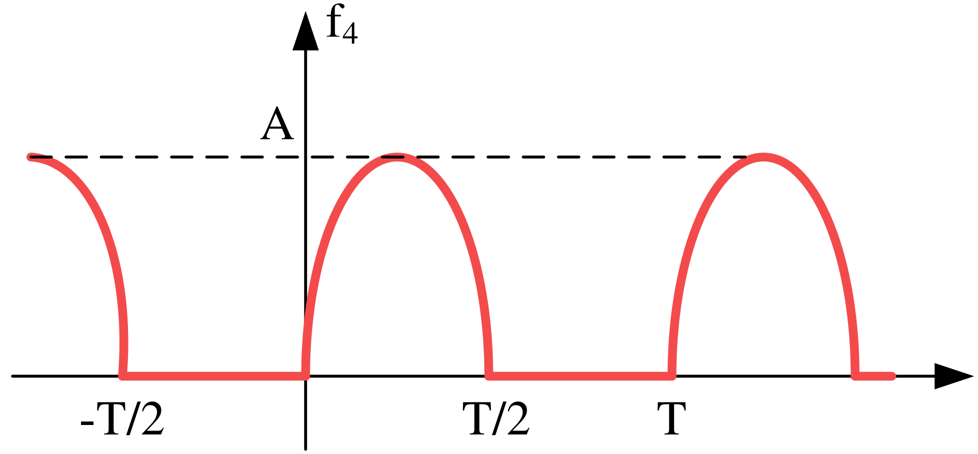
- $f_3(t)$ hàm lẻ

$$f_3(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2A}{n\pi} \cos(n\pi) \sin(n\omega_0 t)$$

Ví dụ tìm chuỗi Fourier

❖ **Chỉnh lưu bán kỳ**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\dfrac{T}{2} \le t \le 0 \\ A\sin\omega t & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

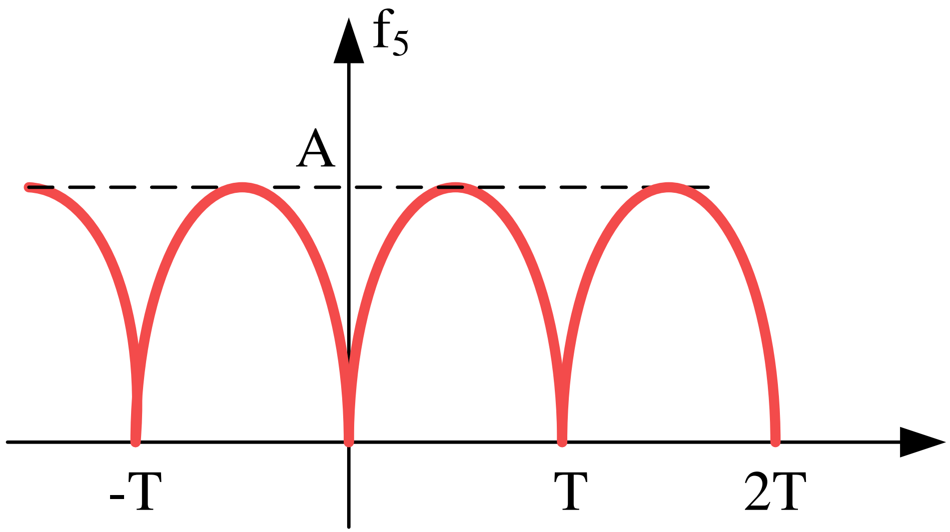


$$\boxed{f_4(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin(\omega_0 t) + \sum_{\substack{n=2 \\ (n=2k)}}^{+\infty} \frac{2A}{1-n^2}\cos(n\omega_0 t)}$$

Ví dụ tìm chuỗi Fourier

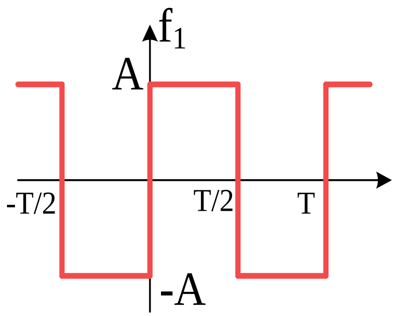
❖ **Chỉnh lưu toàn kỳ**

$$f(t) = \left|A \sin \omega t\right|$$



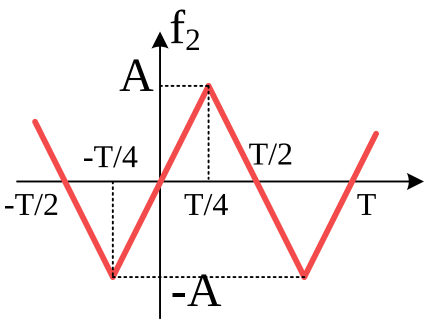
- Tần số cơ bản ω_0 = ?

Các chuỗi Fourier thông dụng



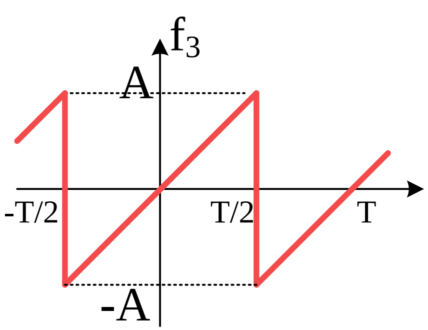
$$f_1(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=2k+1}}^{+\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin(n\omega_0 t)$$

$$f_1(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5} + \dots \right)$$



$$f_2(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8A}{n^2\pi^2} \sin(\tfrac{n\pi}{2}) \sin(n\omega_0 t)$$

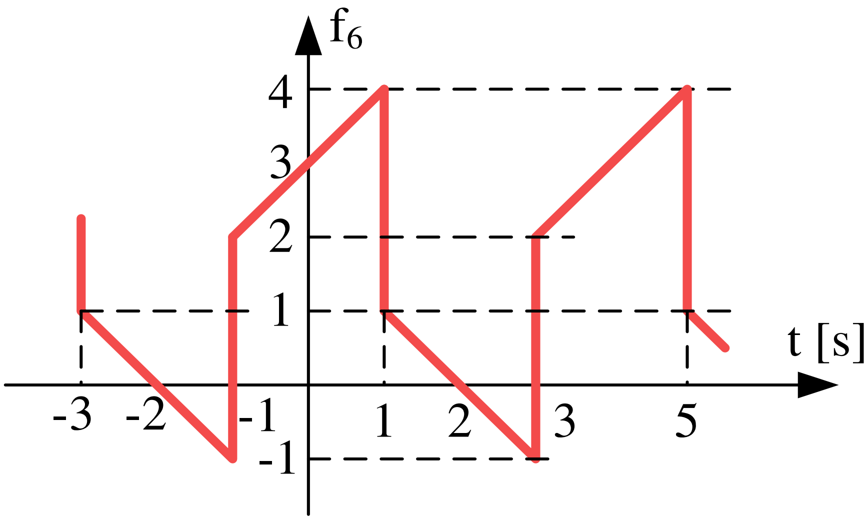
$$f_2(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left(\sin(\omega_0 t) - \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5^2} - \dots \right)$$

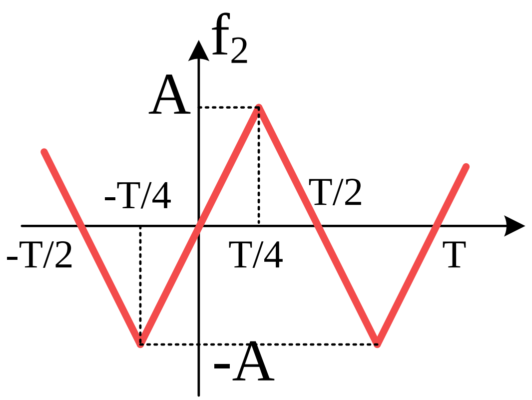


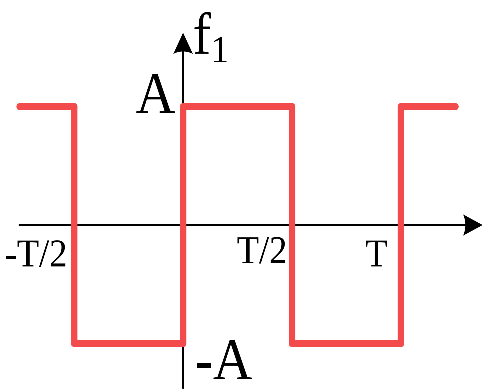
$$f_3(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2A}{n\pi} \cos(n\pi) \sin(n\omega_0 t)$$

$$f_3(t) = \frac{2A}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2} + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} - \dots \right)$$

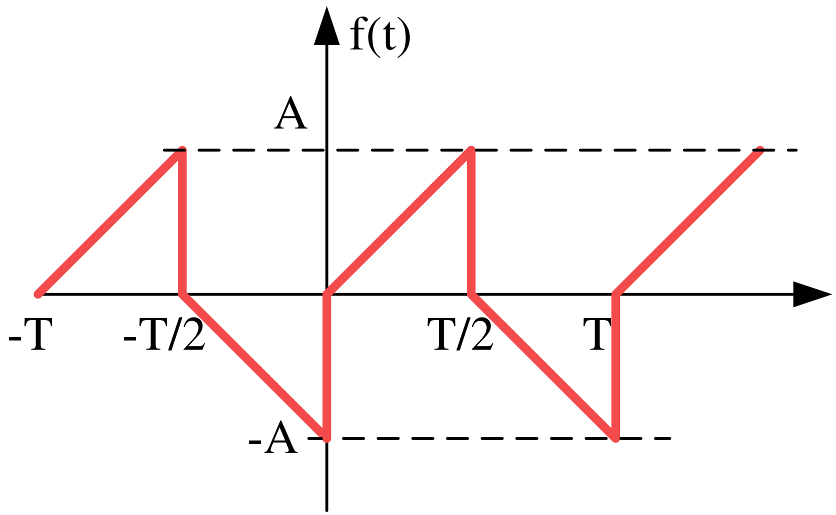
Tổ hợp các khai triển cơ bản







Khai triển chẵn lẻ



$$a_0 = a_{0c}$$

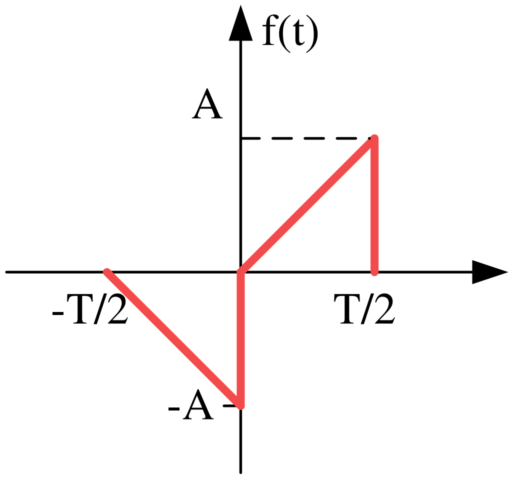
$$a_n = a_{nc}$$

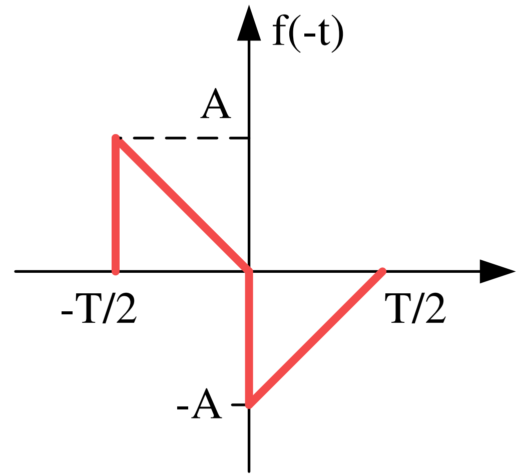
$$b_n = b_{nl}$$

$$f_c(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \to a_{0c}\,; a_{nc}$$

$$f_l(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \to b_{nl}$$

Khai triển chẵn lẻ





$$f_c(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

$$f_l(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$